**1 - Числовые множества. Множество действительных чисел.** Множества, элементами которых являются числа, называются числовыми. Примерами числовых множеств являются: N = {1; 2; 3; ...; n; ... } — множество натуральных чисел; Z0 = {0; 1; 2; ...; n; ... } — множество целых неотрицательных чисел; Z = {0; ±1; ±2; ...; ±n; ...} — множество целых чисел;

Q = {m/n; mєZ,nєN} — множество рациональных чисел. R — множество действительных чисел. Множество R содержит рациональные и иррациональные числа. Всякое рациональное число выражается или конечной десятичной дробью или бесконечной периодической дробью. Так, ½ = 0,5 (= 0,500...), 1/3 = 0,333... — рациональные числа. Действительные числа, не являющиеся рациональными, называются иррациональными. Теорема 13.1. Не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2. Допустим, что существует рациональное число, представленное несократимой дробью m/n, квадрат которого равен 2. Тогда имеем: (m/n)2 = 2, т. е. m2 = 2n2. Отсюда следует, что m2 (а значит, и m) — четное число, т. е. m = 2k. Подставив m = 2k в равенство m2 = 2n2, получим 4k2 = 2n2, т. е. 2k2 = n2. Отсюда следует, что число n—четное, т. е. n=2l.Но тогда дробь m/n = 2k/2l сократима. Это противоречит допущению, что m/n дробь несократима. Следовательно, не существует рационального числа, квадрат которого равен числу 2. Иррациональное число выражается бесконечной непериодической дробью. Так, √2 = 1,4142356... — иррациональное число. Множество R действительных чисел обладает следующими свойствами.

1. Оно упорядоченное: для любых двух различных чисел a и b имеет место одно из двух соотношений а<b либо b<а.

2. Множество R плотное: между любыми двумя различными числами a и b содержится бесконечное множество действительных чисел х, т. е. чисел, удовлетворяющих неравенству a<х<b. Так, если a<b, то одним из них является число (a+b)/2

3. Множество R непрерывное. Пусть множество R разбито на два непустых класса А и В таких, что каждое действительное число содержится только в одном классе и для каждой пары чисел aєА и bєВ выполнено неравенство a<b. Тогда (свойство непрерывности) существует единственное число с, удовлетворяющее неравенству a≤с≤b (aєA, bєВ). Оно отделяет числа класса A от чисел класса В. Число с является либо наибольшим числом в классе А (тогда в классе В нет наименьшего числа), либо наименьшим числом в классе В (тогда в классе А нет наибольшего). Свойство непрерывности позволяет установить взаимно-однозначное соответствие между множеством всех действительных чисел и множеством всех точек прямой. Это означает, что каждому числу хєR соответствует определенная (единственная) точка числовой оси и, наоборот, каждой точке оси соответствует определенное (единственное) действительное число. Поэтому вместо слова «число» часто говорят «точка».

**2 - Числовые функции. График функции. Способы задания функций.** Пусть задана функция ƒ : X→Y. Если элементами множеств X и Y являются действительные числа (т. е. XєR и YєR), то функцию ƒ называют числовой функцией. В дальнейшем будем изучать (как правило) числовые функции, для краткости будем именовать их просто функциями и записывать у = ƒ(х). Переменная х называется при этом аргументом или независимой переменной, а у — функцией или зависимой переменной (от х). Относительно самих величин х и у говорят, что они находятся в функциональной зависимости. Иногда функциональную зависимость у от х пишут в виде у = у(х), не вводя новой буквы (ƒ) для обозначения зависимости. Частное значение функции ƒ(х) при х = a записывают так: ƒ(a). Графиком функции у = (х) называется множество всех точек плоскости Оху, для каждой на которых х является значением аргумента, а у — соответствующим значением функции. Чтобы задать функцию у = ƒ(х), необходимо указать правило, позволяющее, зная х, находить соответствующее значение у. Наиболее часто встречаются три способа задания функции: аналитический, табличный, графический. Аналитический способ: функция задается в виде одной или нескольких формул или уравнений. Аналитический способ задания функции является наиболее совершенным, так как к нему приложены методы математического анализа, позволяющие полностью исследовать функцию у = ƒ(х). Графический способ: задается график функции. Часто графики вычерчиваются автоматически самопишущими приборами или изображаются на экране дисплея. Значения функции у, соответствующие тем или иным значениям аргумента х, непосредственно находятся из этого графика. Преимуществом графического задания является его наглядность, недостатком — его неточность. Табличный способ: функция задается таблицей ряда значений аргумента и соответствующих значений функции. Например, известные таблицы значений тригонометрических функций, логарифмические таблицы. На практике часто приходится пользоваться таблицами значений функций, полученных опытным путем или в результате наблюдений.

**3 - Основные характеристики функции.** 1. Функция у = ƒ(х), определенная на множестве D, называется четной, если xєD выполняются условия -хєD и ƒ(-х) = ƒ(х); нечетной, если xєD выполняются условия -хєD и ƒ(-х) = -ƒ(х). График четной функции симметричен относительно оси Оу, а нечетной — относительно начала координат.

2. Пусть функция у = ƒ(х) определена на множестве D и пусть D1єD. Если для любых значений х1;x2єD1 аргументов из неравенства х1<x2 вытекает неравенство: ƒ(x1)<ƒ(х2), то функция называется возрастающей на множестве D1; f(x1)≤ƒ(х2), то функция называется неубывающей на множестве D1; f(x1)>ƒ(х2), то функция называется убывающей на множестве D1; ƒ(х1)≥ƒ(x2), то функция называется невозрастающей на множестве D1. Возрастающие, невозрастающие, убывающие и неубывающие функции на множестве D1 называются монотонными на этом множестве, а возрастающие и убывающие — строго монотонными. Интервалы, в которых функция монотонна, называются интервалами монотонности.

3. Функцию у = ƒ(х), определенную на множестве D, называют ограниченной на этом множестве, если существует такое число М>0, что для всех хєD выполняется неравенство |ƒ(х)|≤М. Отсюда следует, что график ограниченной функции лежит между прямыми у = -М и у = М (см. рис. 101).

4. Функция у = ƒ(х), определенная на множестве D, называется периодической на этом множестве, если существует такое число Т>0, что при каждом хєD значение (х+Т)єD и ƒ(х+Т) = ƒ(х). При этом число Т называется периодом функции. Если Т — период функции, то ее периодами будут также числа mТ, где m = ±1; ±2,... Так, для у = sin(x) периодами будут числа ±2π; ±4π; ±6π, ... Основной период (наименьший положительный) — это период Т = 2π. Вообще обычно за основной период берут наименьшее положительное число Т, удовлетворяющее равенству ƒ(х+Т) = ƒ(х).

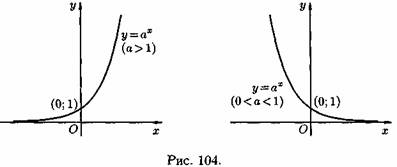
**4 - Обратная функция. Сложная функция. 4.1** Пусть задана функция у = ƒ(х) с областью определения D и множеством значений Е. Если каждому значению уєЕ соответствует единственное значение хєD, то определена функция х = φ(у) с областью определения Е и множеством значений D. Такая функция φ(у) называется обратной к функции ƒ(х) и записывается в следующем виде: х = φ(y) = f-1(y). Про функции у = ƒ(х) и х = φ(у) говорят, что они являются взаимно обратными. Чтобы найти функцию х = φ(у), обратную к функции у = ƒ(х), достаточно решить уравнение ƒ(х) = у относительно х (если это возможно). Примеры:

1. Для функции у = 2х обратной функцией является функция х = у/2;

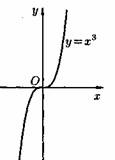
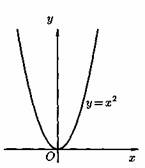
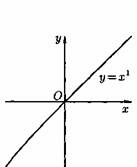
2. Для функции у = х2 хє[0;1] обратной функцией является х = √у; заметим, что для функции у = х2, заданной на отрезке [-1; 1], обратной не существует, т. к. одному значению у соответствует два значения х (так, если у = 1/4, то х1 = 1/2, х2 = -1/2). Из определения обратной функции вытекает, что функция у = ƒ(х) имеет обратную тогда и только тогда, когда функция ƒ(х) задает взаимно однозначное соответствие между множествами D и Е. Отсюда следует, что любая строго монотонная функция имеет обратную. При этом если функция возрастает (убывает), то обратная функция также возрастает (убывает).

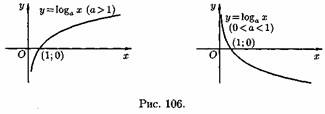
**4.2** Пусть функция у = ƒ(u) определена на множестве D, а функция u = φ(х) на множестве D1, причем для xєD1 соответствующее значение u = φ(х)єD. Тогда на множестве D1 определена функция u = ƒ(φ(х)), которая называется сложной функцией от х (или суперпозицией заданных функций, или функцией от функции). Переменную u = φ(х) называют промежуточным аргументом сложной функции. Например, функция у=sin(2x) есть суперпозиция двух функций у=sin(u) и u=(2х). Сложная функция может иметь несколько промежуточных аргументов.

**5 - Основные элементарные функции и их графики.** Показательная функция у = aх, a>0, а ≠ 1. На рис. 104 показаны графики показательных функций, соответствующие различным основаниям степени.

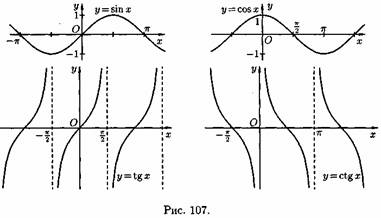
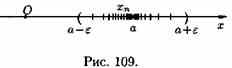


Степенная функция у = хα, αєR. Примеры графиков степенных функций, соответствующих различным показателям степени, предоставлены на рисунках:

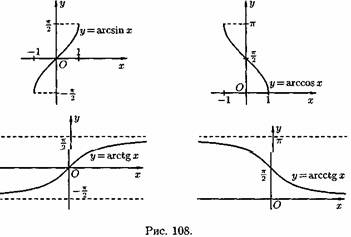


Логарифмическая функция y = logax, a>0, a≠1; графики логарифмических функций, соответствующие различным основаниям, показаны на рис. 106. 

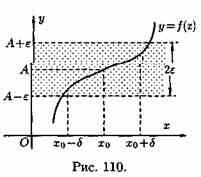
Тригонометрические функции у = sin(x), у = cos(x), у = tg(х), у = ctg(x); графики тригонометрических функций имеют вид, показанный на рис. 107.



Обратные тригонометрические функции у = arcsin(x), у = arccos(x), у = arctg(x), у = arcctg(x). На рис. 108 показаны графики обратных тригонометрических функций.



Функция, задаваемая одной формулой, составленной из основных элементарных функций и постоянных с помощью конечного числа арифметических операций (сложения, вычитания, умножения, деления) и операций взятия функции от функции, называется элементарной функцией.

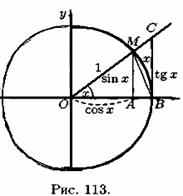


**6 - Числовая последовательность.** Под числовой последовательностью х1, х2, x3,..., хn... понимается функция xn = f(n) (15.1), заданная на множестве N натуральных чисел. Кратко последовательность обозначается в виде {хn} или хn, nєN. Число x1 называется первым членом (элементом) последовательности, х2 — вторым, ..., хn — общим или n-м членом последовательности. Чаще всего последовательность задается формулой его общего члена. Формула (15.1) позволяет вычислить любой член последовательности по номеру, по ней можно сразу вычислить любой член последовательности. Последовательность {хn} называется ограниченной, если существует такое число М>0, что для любого nєN выполняется неравенство |хn|≤М. В противном случае последовательность называется неограниченной. Последовательность {хn} называется возрастающей (неубывающей), если для любого n выполняется неравенство an+1>an (an+1≥аn). Аналогично определяется убывающая (невозрастающая) последовательность. Все эти последовательности называются монотонными последовательностями. Если все элементы последовательности {хn} равны одному и тому же числу с, то ее называют постоянной. Другой способ задания числовых последовательностей — рекуррентный способ. В нем задается начальный элемент x1 (первый член последовательности) и правило определения n-го элемента по (n-1)-му: xn = f(xn-1). Таким образом, x2 = ƒ(x1), х3 = ƒ(х2) и т. д. При таком способе задания последовательности для определения 100-го члена надо сначала посчитать все 99 предыдущих.

**7 - Предел числовой последовательности.** Число a называется пределом последовательности (хn), если для любого положительного числа ε найдется такое натуральное число N, что при всех n>N выполняется неравенство: |хn-a|<ε (15.2) В этом случае говорят, что последовательность {хn} (или переменная хn, пробегающая последовательность x1, x2, х3,...) имеет предел, равный числу a (или хn стремится к a). Говорят также, что последовательность сходится к а. Выясним геометрический смысл определения предела последовательности. Неравенство (15.2) равносильно неравенствам —ε<хn-a<ε или a-ε<хn<a+ε, которые показывают, что элемент хn находится в ε-окрестности точки a. Поэтому определение предела последовательности геометрически можно сформулировать так: число a называется пределом последовательности {xn}, если для любой ε-окресности точки a найдётся натуральное число N, что все значения хn, для которых n>N, попадут в ε-окрестность точки a. Ясно, что чем меньше ε, тем больше число N, но в любом случае внутри ε-окрестности точки a находится бесконечное число членов последовательности, а вне ее может быть лишь конечное их число.

**8 - Предельный переход в неравенствах. Теорема Вейерштрасса.** Рассмотрим последовательности {хn}, {уn} и {zn}. Теорема 1. Если lim(xn) = a, lim(yn) = b и, начиная с некоторого номера, выполняется неравенство хn≤ уn, то a≤b. Теорема 2. Если lim(xn) = a, lim(yn) = a и справедливо неравенство xn≤zn≤yn (начиная с некоторого номера), то lim(zn) = a. Признак существования предела последовательности: теорема Вейерштрасса. Всякая монотонная ограниченная последовательность имеет предел. Для всех указанных пределов: n→∞.

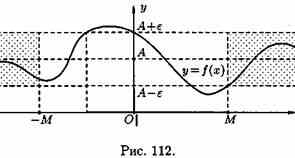
**9 - Предел функции в точке.** Пусть функция у = ƒ(х) определена в некоторой окрестности точки х0, кроме, быть может, самой точки х0. Определение 1 (на «языке последовательностей», или по Гейне). Число А называется пределом функции у = ƒ(х) в точке x0 (или при х→х0), если для любой последовательности допустимых значений аргумента xn, nєN (xn ≠ 0), сходящейся к х0 последовательность соответствующих значений функции ƒ(хn), nєN, сходится к числу А, т.е. lim(f(xn)) = A, n→∞. Геометрический смысл предела функции означает, что для всех точек х, достаточно близких к точке х0, соответствующие значения функции как угодно мало отличаются от числа А. Определение 2 (на «языке ε-δ», или по Коши). Число А называется пределом функции в точке х0 (или при х→х0), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что для всех х ≠ х0, удовлетворяющих неравенству |х-х0|<δ, выполняется неравенство |ƒ(х)-А|<ε. Геометрический смысл предела функции: если для любой ε-окрестности точки А найдется такая δ-окрестность точки х0, что для всех х ≠ х0 из этой δ-окрестности соответствующие значения функции ƒ(х) лежат в ε-окрестности точки А. Очевидно, что величина δ зависит от выбора ε, поэтому пишут δ = δ(ε).

**10 - Односторонние пределы. Предел функции при x→∞. 10.1** Число А1 называется пределом функции у = ƒ(х) слева в точке x0, если для любого число ε>0 существует число δ = δ(ε)> 0 такое, что при х є (x0-δ; x0), выполняется неравенство |ƒ(х)-А|<ε. Предел слева записывают так: lim(ƒ(х)) = А при х→x0-0 или коротко: ƒ(x0-0) = А1 (обозначение Дирихле) (см. рис. 111).

Аналогично определяется предел функции справа. Коротко предел справа обозначают ƒ(x0+0) = А. Пределы функции слева и справа называются односторонними пределами. Очевидно, если существует предел, равный A, то существуют и оба односторонних предела, причем А = А1 = А2. Справедливо и обратное утверждение. Если же А1 ≠ А2, то предел не существует.

**10.2** Пусть функция у = ƒ(х) определена в промежутке (-∞;∞). Число А называется пределом функции ƒ(х) при х→∞, если для любого положительного числа ε существует такое число М = М(ε)>0, что при всех х, удовлетворяющих неравенству |х|>М выполняется неравенство |ƒ(х)-А|<ε.

Геометрический смысл этого определения таков: для любого ε>0 существует М>0, что при хє(-∞;-М) или хє(М;+∞) соответствующие значения функции ƒ(х) попадают в ε-окрестность точки А, т. е. точки графика лежат в полосе шириной 2ε, ограниченной прямыми у = А+ε и у =А-ε (см. рис. 112).



**11 - Бесконечно малые функции. Определения и основные теоремы.** Функция у = f(х) называется бесконечно малой при х→x0, если lim(f(x)) = 0 при х→x0. Бесконечно малые функции часто называют бесконечно малыми величинами или бесконечно малыми; обозначают обычно греческими буквами α, ß и т. д. Теорема 17.1. Алгебраическая сумма конечного числа бесконечно малых функций есть бесконечно малая функция. Теорема 17.2 Произведение ограниченной функции на бесконечно малую функцию есть функция бесконечно малая. Следствие 17.1. Так как всякая б.м.ф. ограничена, то из теоремы (17.2) вытекает: произведение двух б.м.ф. есть функция бесконечно малая. Следствие 17.2. Произведение б.м.ф. на число есть функция бесконечно малая. Теорема 17.3. Частное от деления бесконечно малой функции на функцию, имеющую отличный от нуля предел, есть функция бесконечно малая. Теорема 17.4 . Если функция α(х) — бесконечно малая (α ≠ 0), то функция 1/α(х) есть бесконечно большая функция и наоборот: если функция ƒ(х)— бесконечно большая, то 1/ƒ(х) — бесконечно малая. Справедливо обратное утверждение.

**12 - Связь между функцией, ее пределом и бесконечно малой функцией.** Теорема 17.5. Если функция ƒ(х) имеем предел, равный А, то ее можно представить как сумму числа А и бесконечно малой функции а(х), т. е. если lim(ƒ(х)) = А, при x→x0 то ƒ(х) = А+а(х). Теорема 17.6 (обратная). Если функцию ƒ(х) можно представить в виде суммы числа А и бесконечно малой функции α(х), то число А является пределом функции ƒ(х), т. е. если ƒ(х) = А+α(х), то lim(ƒ(х)) = А при x→x0

**13 - Основные теоремы о пределах.** Пусть пределы lim(ƒ(х)), lim(φ(х)) существуют при x→x0. Теорема 17.7. Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов. Следствие 17.3. Функция может иметь только один предел при х→х0. [!] Пусть lim(f(x)) = A и B при х→х0. lim(f(x)-f(x)) = lim(f(x)) - lim(f(x)) = A-B. Отсюда А-В = 0, т. е. А = В. Теорема 17.8. Предел произведения двух функций равен произведению их пределов. Следствие 17.4 . Постоянный множитель можно выносить за знак предела. Следствие 17.5 . Предел степени с натуральным показателем равен той же степени предела. Теорема 17.9. Предел дроби равен пределу числителя, деленному на предел знаменателя, если предел знаменателя не равен нулю.

**14 - Признаки существования пределов.** Теорема 17.10 (о пределе промежуточной функции). Если функция ƒ(х) заключена между двумя функциями φ(х) и g(х), стремящимися к одному и тому же пределу, то она также стремится к этому пределу, т. е. если [lim(φ(x)) = A, lim(g(x)) = A] [17.6], [φ(x)≤f(x)≤g(x)] [17.7], то lim(f(x)) = A при x→x0. [!] Для любого ε>0 существуют две окрестности δ1 и δ2 точки х0, в одной из которых выполняется неравенство |φ(х)-А|<ε, т. е. [-ε<φ(х)-А<ε] [17.8], а в другой |g(х)-А|<ε, т. е. [-ε<g(х)-А<ε] [17.9]. Пусть δ — меньшее из чисел δ1 и δ2. Тогда в δ-окрестности точки x0 выполняются оба неравенства (17.8) и (17.9). Из неравенств (17.7) находим, что [φ(x)-A≤f(x)-A≤g(x)-A] [17.10]. С учетом неравенств (17.8) и (17.9) из неравенства (17.10) следуют неравенства -ε<ƒ(х)-А<ε или |ƒ(х)-А|<ε. Мы доказали, что lim(ƒ(х)) = А при х –> x0. Теорема 17.11 (о пределе монотонной функции). Если f(x) монотонна и ограничена при х<хо или при х>хо, то существует соответственно ее левый предел или ее правый предел.

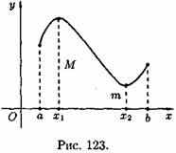
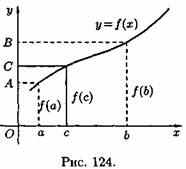
**15 - Первый и второй замечательные пределы. 15.1** При вычислении пределов выражений, содержащих тригонометрические функции, часто используют предел [lim(sin(x)/x) = 1 при х→0] [17.11] называемый первым замечательным пределом. Читается: предел отношения синуса к его аргументу равен единице, когда аргумент стремится к нулю. [!] Возьмем круг радиуса 1, обозначим радианную меру угла <MOB через х (см. рис. 113). Пусть 0<х<3.14/2. На рисунке |АМ| = sin(x), дуга MB численно равна центральному углу х, |ВС| = tg(x). Очевидно, имеем S∆MOB <Sсект.MOB<S∆COB. На основании соответствующих формул геометрии получаем ½sin(x)<½x<½tg(x). Разделим неравенства на ½sin(x)>0, получим 1<x/sin(x)<1/cos(x) или cos(x)<sin(x)/x<1. Так как lim(cos(x)) = 1 и lim(1) = 1 при х→0, то по признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов получаем (17.11). При х<0 ничего не изменится. **15.2** Как известно, предел числовой последовательности [xn = (1+1/n)n, nєN, имеет предел, равный е] [17.14]. Докажем, что к числу е стремится и соответствующая функция при х→∞. [lim(1+1/x)x = e при при х→∞] [17.15].

1. Пусть х→+∞. Каждое значение х заключено между двумя положительными целыми числами: n≤х<n+1, где n = [х]— это целая часть х. Отсюда следует: (1/(n+1))<1/x≤1/n; 1+(1/(n+1))<1+1/x≤1+1/n; (1+(1/(n+1)))n<(1+1/x)x≤(1+1/n)n+1. Если х→+∞, то n→∞. Поэтому, согласно (17.14), имеем: lim(1+(1/(n+1)))n = lim(1+(1/(n+1)))n+1/lim(1+(1/(n+1))) = e/1 = e lim(1+1/n)n+1 = lim(1+1/n)n\*lim(1+1/n) = e\*1 = e (n→∞). По признаку (о пределе промежуточной функции) существования пределов: [lim(1+1/x)x = e при при х→+∞] [17.16].

2. Пусть х→-∞. Сделаем подстановку -х = t, тогда: [lim(1+1/x)x = lim(1-1/t)-t = lim(t/(t-1))t = lim(1+1/(t-1))t = lim(1+1/(t-1))t-1\* lim(1+1/(t-1))1 = e\*1 = e (только в самом первом пределе x→-∞, в остальных к +∞)] [17.17]. Из равенств (17.16) и (17.17) вытекает равенство (17.15). Если в равенстве (17.15) положить 1/x = а (а→0 при х→∞), оно запишется в виде [lim(1+a)1/a = e при a→0] [17.18]. Равенства (17.15) и (17.18) называются вторым замечательным пределом.

**16 - Сравнение бесконечно малых функций.** α = α(х) и ß = ß(х) есть б.м.ф. при х→х0, т. е. lim(α(х)) = 0 и lim(ß(х)) = 0. 1. Если предел соотношения α(х) и ß(х) = А ≠ 0, то α и ß называются бесконечно малыми одного порядка. 2. Если предел соотношения α(х) и ß(х) = 0, то α называется бесконечно малой более высокого порядка, чем ß. 3. Если предел соотношения α(х) и ß(х) = ∞, то α называется бесконечно малой более низкого порядка, чем ß. 4. Если предел соотношения α(х) и ß(х) не существует, то α и ß называются несравнимыми бесконечно малыми.

**17 - Эквивалентные бесконечно малые и основные теоремы о них.** Если предел соотношения α и ß = 1 при х→х0, то α и ß называются эквивалентными бесконечно малыми: α~ß. Теорема 18.1. Предел отношения двух бесконечно малых функций не изменится, если каждую или одну из них заменить эквивалентной ей бесконечно малой. [!] Пусть α~α’ и ß~ ß’ при х→х0. Тогда предел их соотношения = пределу (α/ß)\*(α’/α’)\*(ß’/ß’) = 1\*1\*предел соотношения α’ к ß’. Доказано. Теорема 18.2 . Разность двух эквивалентных бесконечно малых функций есть бесконечно малая более высокого порядка, чем каждая из них. Справедливо и обратное утверждение: если разность б.м.ф. α и ß есть бесконечно малая высшего порядка, чем α или ß, то α и ß — эквивалентные бесконечно малые. Теорема 18.3 . Сумма конечного числа бесконечно малых функций разных порядков эквивалентна слагаемому низшего порядка. Слагаемое, эквивалентное сумме бесконечно малых, называется главной частью этой суммы. Замена суммы б.м.ф. ее главной частью называется отбрасыванием бесконечно малых высшего порядка.

**18 - Непрерывность функции в точке.**Пусть функция у = ƒ(х) определена в точке х0 и в некоторой окрестности этой точки. Функция y = f(x) называется непрерывной в точке х0, если существует предел функции в этой точке и он равен значению функции в этой точке, т. е. [lim(f(x)) = f(x0) при х→х0] [19.1]. Равенство (19.1) означает выполнение трех условий. 1. Функция ƒ(х) определена в точке x0 и в ее окрестности. 2. Функция ƒ(х) имеет предел при х→х0. 3. Предел функции в точке х0 равен значению функции в этой точке, т. е. выполняется равенство (19.1). При нахождении предела непрерывной функции ƒ(х) можно перейти к пределу под знаком функции, то есть в функцию ƒ(х) вместо аргумента х подставить его предельное значение х0. Пусть функция у=ƒ(х) определена в некотором интервале (а;b). Возьмем произвольную точку х0є(а;b). Для любого хє(а;b) разность х-х0 называется приращением аргумента х в точке х0 и обозначается ∆х («дельта х»): ∆х=х-x0. Отсюда х=х0+∆х. Разность соответствующих значений функций ƒ(х)-ƒ(х0) называется приращением функции ƒ(х) в точке х0 и обозначается ∆у (или ∆ƒ или ∆ƒ(х0)): ∆у=ƒ(х)-ƒ(х0) или ∆у=ƒ(х0+∆х)-ƒ(х0). Очевидно, приращения ∆х и ∆у могут быть как положительными, так и отрицательными числами. Запишем равенство (19.1) в новых обозначениях. Так как условия х→х0 и х-х0→0 одинаковы, то равенство (19.1) принимает вид lim(f(x)-f(x0)) = 0 при х→х0 или [lim(∆у) = 0 при х→0] [19.3]. Полученное равенство является еще одним определением непрерывности функции в точке: функция у = ƒ(х) называется непрерывной в точке х0, если она определена в точке х0 и ее окрестности и выполняется равенство (19.3), т. е. бесконечно малому приращению аргумента соответствует бесконечно малое приращение функции.

**19 - Точки разрыва функции и их классификация.** Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называются точками разрыва этой функции. Если х = х0 — точка разрыва функции у = ƒ(х), то в ней не выполняется по крайней мере одно из условий первого определения непрерывности функции, а именно:

1. Функция определена в окрестности точки х0, но не определена в самой точке х0. 2. Функция определена в точке х0 и ее окрестности, но не существует предела ƒ(х) при х→х0. 3. Функция определена в точке х0 и ее окрестности, существует но этот предел не равен значению функции в точке x0.

Все точки разрыва функции разделяются на точки разрыва первого и второго рода. Точка разрыва х0 называется точкой разрыва первого рода функции у = ƒ(х), если в этой точке существуют конечные пределы функции слева и справа (односторонние пределы). При этом:

а.) если А1 = А2, то точка х0 называется точкой устранимого разрыва;

б.) если А1 ≠ А2, то точка х0 называется точкой конечного разрыва.

Величину |A1-А2| называют скачком функции в точке разрыва первого рода.

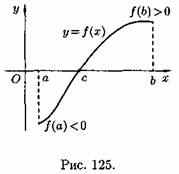
Точка разрыва х0 называется точкой разрыва второго рода функции у = ƒ(х), если по крайней мере один из односторонних пределов (слева или справа) не существует или равен бесконечности.

**20 - Основные теоремы о непрерывных функциях.** Теорема 19.1 . Сумма, произведение и частное двух непрерывных функций есть функция непрерывная (для частного за исключением тех значений аргумента, в которых делитель равен нулю). Теорема 19.2 . Пусть функции u = φ(х) непрерывна в точке х0, а функция у = ƒ(u) непрерывна в точке u0 = φ(х0). Тогда сложная функция ƒ(φ(х)), состоящая из непрерывных, функций, непрерывна в точке х0. Теорема 19.3 . Если функция у = ƒ(х) непрерывна и строго монотонна на [a;b] оси (Oх, то обратная функция у = φ(х) также непрерывна и монотонна на соответствующем отрезке [c;d] оси Оу.

Как известно, элементарной называется такая функция, которую можно задать одной формулой, содержащей конечное число арифметических действий и суперпозиций (операции взятия функции от функции) основных элементарных функций. Поэтому из приведенных выше теорем вытекает: всякая элементарная функция непрерывна в каждой точке, в которой она определена.

**21 - Свойства функций, непрерывных на отрезке.** Теорема 19.4 (Вейерштрасса). Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений.

Изображенная на рисунке 123 функция у = ƒ(х) непрерывна на отрезке [а;b], принимает свое наибольшее значение М в точке х1, а наименьшее m — в точке х2. Для любого хє[а;b] имеет место неравенство m≤ƒ(х)≤М. Следствие 19.1 . Если функция непрерывна на отрезке, то она ограничена на этом отрезке. Теорема 19.5 (Больцано-Коши). Если функция у = ƒ(х) непрерывна на отрезке [a;b] и принимает на его концах неравные значения ƒ(a) = А и ƒ(b) = В, то на этом отрезке она принимает и все промежуточные значения между А и В. Следствие 19.2. Если функция у = ƒ(х) непрерывна на отрезке [a;b] и на его концах принимает значения разных знаков, то внутри отрезка [a; b] найдется хотя бы одна точка с, в которой данная функция ƒ(х) обращается в нуль: ƒ(с) = 0.



**22 - Определение производной; ее механический и геометрический смысл. Уравнение касательной и нормали к кривой.** Пусть функция у = ƒ(х) определена на некотором интервале (a;b). Проделаем следующие операции:

- аргументу хє(α; b) дадим приращение ∆х: х+∆х є(a; b);

- найдем соответствующее приращение функции: ∆у = ƒ(х+∆х)—ƒ(х);

- составим отношение приращения функции к приращению аргумента: ∆у/∆х;

- найдем предел этого отношения при ∆х→0:

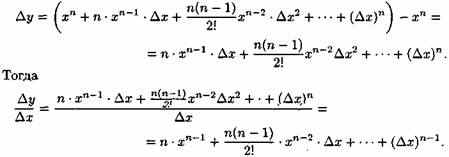
Если этот предел существует, то его называют производной функции ƒ(х) и обозначают одним из символов f'x, ƒ'(х); у'; у'х;.dy/dx. Производной функции у = ƒ(х) β точке х0 называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю: y’ = lim((f(x0+∆x)-f(x0))/ ∆x) или lim((f(x)-f(x0))/x-x0) при ∆х→0. Функция у = ƒ(х), имеющая производную в каждой точке интервала (a;b), называется дифференцируемой в этом интервале; операция нахождения производной функции называется дифференцированием. Обобщая, можно сказать, что если функция y = f(x) описывает какой-либо физический процесс, то производная у' есть скорость протекания этого процесса. В этом состоит физический смысл производной. Касательной к данной кривой в данной точке М называется предельное положение МТ секущей ММ1, проходящей через точку М, когда вторая точка пересечения М1 неограниченно приближается по кривой к точке М1. Производная ƒ'(х) β точке х равна угловому коэффициенту касательной к графику функции у = ƒ(х) в точке, абсцисса которой равна х. В этом заключается геометрический смысл производной. ƒ'(х) = tg(a) = k. Если точка касания М имеет координаты (х0;y0) (см. рис. 130), то угловой коэффициент касательной есть k = ƒ'(х0). Пользуясь уравнением прямой, проходящей через заданную точку в заданном направлении (у-y0—k(x—х0)), можно записать уравнение касательной: у—у0 = ƒ'(х0)\*(х-х0). Прямая, перпендикулярная касательной в точке касания, называется нормалью к кривой. Так как нормаль перпендикулярна касательной, то ее угловой коэффициент kнорм. = (-1/kкас.) = (-1/f’(x0)). Поэтому уравнение нормали имеет вид: у—у0 = (-1/f’(x0))\*(x-x0) (если f’(x0) не равен 0).

**23 - Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.** Теорема 20.1. Если функция дифференцируема в некоторой точке, то она непрерывна в ней. Обратное неверно! Замечания. 1 . Существуют односторонние пределы функции у = |х| в точке х = 0. В таких случаях говорят, что функция имеет односторонние производные (или «производные слева и справа»), и обозначают соответственно ƒ'-(х) и ƒ'+(х). Если ƒ'+(х) ≠ ƒ'-(х), то производная в точке не существует. Не существует производной и в точках разрыва функции. 2. Производная у' = ƒ'(х) непрерывной функции у = ƒ(х) сама не обязательно является непрерывной. Если функция у = ƒ(х) имеет непрерывную производную у' = ƒ'(х) в некотором интервале (a;b), то функция называется гладкой.

**24 - Производная суммы, разности, произведения и частного функций.** Пусть функции u = u(х) и ν = ν(х) - две дифференцируемые в некотором интервале (a;b) функции. Теорема 20.2 . Производная суммы (разности) двух функций равна сумме (разности) производных этих функций: (u±ν)' = u'±ν'. [!] Обозначим у u±ν. По определению производной и основным теоремам о пределах получаем: y’ = lim(числитель: u(x+∆x)±v(x+∆x))-(u(x)±v(x)) знаменатель: ∆x) = lim(числитель: u(x+∆x)-u(x) знаменатель: ∆x//±//числитель: v(x+∆x)-v(x) знаменатель: ∆x) = lim(∆u/∆x)±lim(∆v/∆x) = u’±v’ (при ∆x->0). Теорема 20.3 . Производная произведения двух функций равна произведению производной первого сомножителя на второй плюс произведение первого сомножителя на производную второго: (u\*ν)' = u'ν+v'u. Замечания. а.) (с\*u)' = с\*u', где с = const; б.) (u\*ν\*w)' = u'v\*w+u\*v'\*w+u\*v\*w'. Теорема 20.4. Производная частного двух функций u(x) на v(x) (если ν(х) ≠ 0) равна дроби, числитель которой есть разность произведений знаменателя дроби на производную числителя и числителя дроби на производную знаменателя, а знаменатель есть квадрат прежнего знаменателя. Следствие 20.1. (u/c)’ = (1/c)\*u’. Следствие 20.2. (c/v)’ = -(c\*v’)/v2, где c = const.

**25 - Производные сложной и обратной функций.** Пусть у = ƒ(и) и u = φ(х), тогда у = ƒ(φ(х)) — сложная функция с промежуточным аргументом u и независимым аргументом х. Теорема 20.5 . Если функция u = φ(х) имеет производную u'х в точке х, а функция у = ƒ(u) имеет производную у'u в соответствующей точке u = φ(х), то сложная функция у = ƒ(φ(х)) имеет производную у'х в точке х, которая находится по формуле у'х = у'u-u'х. Для нахождения производной сложной функции надо производную данной функции по промежуточному аргументу умножить на производную промежуточного аргумента по независимому аргументу. Теорема 20.6 . Если функция у = ƒ(х) строго монотонна на интервале (a;b) и имеет неравную нулю производную ƒ'(х) в произвольной точке этого интервала, то обратная ей функция х = φ(у) также имеет производную φ'(у) в соответствующей точке, определяемую равенством φ’(y) = 1/f’(x) или x’y = 1/y’x. Производная обратной функции равна обратной величине производной данной функции.

**26 - Правила дифференцирования. Производные основных элементарных функций. 26.1** 1. (u±v)’ = u’±v’; 2. (uv) = u’v+uv’, в частности (cu)’ = cu’; 3. (u/v)’ = (u’v-uv’)/v2, в частности (c/v)’ = -(cv’)/v2; 4. y’x = y’u\*u’x, если y = f(u), u = ф(x); 5. y’x = 1/x’y, если y = f(x), x = ф(y). **26.2** Степенная функция у = xn, nєN. Дадим аргументу х приращение ∆х. Функция у = хn получит приращение ∆у = (х+∆х)n-xn. По формуле бинома Ньютона имеем



Находим предел составленного отношения при ∆х→0:

Таким образом, (хn) = n\*хn-1.

Показательная функция у = ах, а>0, а ≠ 1.

Найдем сначала производную функции у = ех. Придав аргументу х приращение ∆х, находим приращение функции ∆у: ∆у = ех+∆х-ех = ех(е∆х-1). Стало быть, ∆y/∆x = (ex(e∆x-1))/∆x и

При вычислении предела воспользовались эквивалентностью ех-1~x при х→0. Итак, у' = ех, т.е. (ex)' = ex. Теперь рассмотрим функцию у = ах, х є R. Так как ах=exln(a), то по формуле производной сложной функции находим:

(аx)' = (ехln(а))' = exln(a)\*(х\*ln(a))' = ехln(а)\*lna = ax\*ln(а).

**27 - Дифференцирование неявно заданной функции.** Если функция задана уравнением у = ƒ(х), разрешенным относительно у, то функция задана в явном виде (явная функция). Под неявным заданием функции понимают задание функции в виде уравнения F(x;y) = 0, не разрешенного относительно у. Всякую явно заданную функцию у = ƒ(х) можно записать как неявно заданную уравнением ƒ(х)-у = 0, но не наоборот. Не всегда легко, а иногда и невозможно разрешить уравнение относительно у (например, у+2х+cosy-1 = 0 или 2у-х+у = 0). Если неявная функция задана уравнением F(x; у) = 0, то для нахождения производной от у по х нет необходимости разрешать уравнение относительно у: достаточно продифференцировать это уравнение по x, рассматривая при этом у как функцию х, и полученное затем уравнение разрешить относительно у'. Производная неявной функции выражается через аргумент х и функцию у.

**28 - Дифференцирование параметрически заданной функции.** Пусть зависимость между аргументом х и функцией у задана параметрически в виде двух уравнений: [x = x(t), y = y=y(t)] [21.1], где t — вспомогательная переменная, называемая параметром. Найдем производную у'х, считая, что функции (21.1) имеют производные и что функция х = x(t) имеет обратную t = φ(х). По правилу дифференцирования обратной функции:[ t’x = 1/x’t] [21.2]. Функцию у = ƒ(х), определяемую параметрическими уравнениями (21.1), можно рассматривать как сложную функцию у = y(t), где t = φ(х). По правилу дифференцирования сложной функции имеем: у'х = y't\*t'x. С учетом равенства (21.2) получаем: y’x = y’t\*1/x’t, т.е y’x = y’t/x’t. Полученная формула позволяет находить производную у'х от функции заданной параметрически, не находя непосредственной зависимости у от х.

**29 - Логарифмическое дифференцирование.** В ряде случаев для нахождения производной целесообразно заданную функцию сначала прологарифмировать. А затем результат продифференцировать. Такую операцию называют логарифмическим дифференцированием. [!] Найти производную функции y = (sin(2x))x^2+1 . Пользуясь формулой (22.1), получаем: y’ = (sin(2x))x^2+1 \*ln(sin(2x))\*2x+(x2+1)(sin(2x)x^2\*cos(2x)\*2. Существуют функции, производные которых находят лишь логарифмическим дифференцированием. К их числу относится так называемая степенно-показательная функция у = uv, где u = u(x) и ν = ν(х) - заданные дифференцируемые функции от х. Найдем производную этой функции. ln(y) = y\*ln(u) => (1/y)\*y’ = v’\*ln(u)+v\*(1/u)\*u’ => y’ = y(v’\*ln(u)+v\*(1/u)\*u’), y’ = uv(v’\*ln(u)+v(1/u)u’), [(uv)’ = uv\*ln(u)\*v’+v\*uv-1\*u’] [22.1] Сформулируем правило запоминания формулы (22.1): производная степенно-показательной функции равна сумме производной показательной функции, при условии u = const, и производной степенной функции, при условии ν = const.

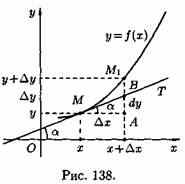
**30 - Производные высших порядков. Механический смысл производной второго порядка. 30.1** Производная у' = ƒ'(х) функции у = ƒ(х) есть также функция от х и называется производной первого порядка. Если функция ƒ'(х) дифференцируема, то ее производная называется производной второго порядка и обозначается у". Производной n-го порядка (или n-й производной) называется производная от производной (n-1) порядка. **30.2** Пусть материальная точка М движется прямолинейно по закону S = f(t). Как уже известно, производная S’t равна скорости точки в данный момент времени: S't = V. Покажем, что вторая производная от пути по времени есть величина, ускорения прямолинейного движения точки, т. е. S" = α. Пусть в момент времени t скорость точки равна V, а в момент t+∆t — скорость равна V+∆V, т. е. за промежуток времени ∆t скорость изменилась на величину ∆V. Отношение ∆V/∆t выражает среднее ускорение движения точки за время ∆t. Предел этого отношения при ∆t→0 называется ускорением точки М в данный момент t и обозначается буквой α: lim(∆V/∆t) = α, т.е. V’= α. Но V = S't. Поэтому α = (S't)', т. е. α = S'’t

**31 - Производные высших порядков от функций, заданных параметрически.** Пусть функция у = ƒ(х) задана параметрическими уравнениями [x = x(t), y = y = y(t)]. Как известно, первая производная у'х находится по формуле (23.1) y’x = y’t/x’t. Найдем вторую производную от функции заданной параметрически. Из определения второй производной и равенства (23.1) следует, что: y’’xx = (y’x)’x = (y’x)’t\*t’x = (y’x)’t/x’t. [y’’xx = (y’x)’t/x’t] [23.2].

**32 - Понятие дифференциала функции и его геометрический смысл.**

Пусть функция у = ƒ(х) имеет в точке х отличную от нуля производную:

lim(∆y/∆x) = f’(x) ≠ 0 при ∆x→0. Тогда, по теореме о связи функции, ее предела и бесконечно малой функции, можно записать ∆y/∆х = ƒ'(х)+α, где α (БМ более высокого порядка, чем ∆x)→0 при ∆х→0, или ∆у = ƒ'(х)\*∆х+α\*∆х. Дифференциалом функции у = ƒ(х) в точке х называется главная часть ее приращения, равная произведению производной функции на приращение аргумента, и обозначается dу (или dƒ(х)): [∆y = ƒ'(х)\*∆х] [24.1]. Выясним геометрический смысл дифференциала. Для этого проведем к графику функции у = ƒ(х) в точке М(х; у) касательную МТ и рассмотрим ординату этой касательной для точки х+∆х (см. рис. 138). На рисунке ½ АМ½ = ∆х, |AM1| = ∆у. Из прямоугольного треугольника МАВ имеем: tg(α) =|AB|/∆x, т.е. |AB|=tg(α)\*∆x. Но, согласно геометрическому смыслу производной, tg(α) = ƒ'(х). Поэтому АВ = ƒ'(х)\*∆х. Сравнивая полученный результат с формулой (24.1), получаем dy = АВ, т. е. дифференциал функции у = ƒ(х) в точке х равен приращению ординаты касательной к графику функции в этой точке, когда х получит приращение ∆х.

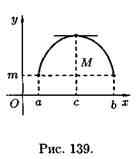
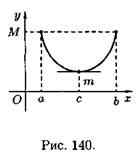
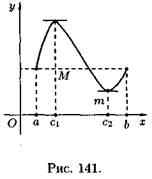


**33 - Применение дифференциала к приближенным вычислениям.** Как уже известно, приращение ∆у функции у = ƒ(х) в точке х можно представить в виде ∆у = ƒ'(х)\*∆х+α\*∆х, где α→0 при ∆х→0, или ∆у = dy+α\*∆х. Отбрасывая бесконечно малую α\*∆х более высокого порядка, чем ∆х, получаем приближенное равенство [∆у≈dy] [24.3]. Причем это равенство тем точнее, чем меньше ∆х. Это равенство позволяет с большой точностью вычислить приближенно приращение любой дифференцируемой функции. Дифференциал обычно находится значительно проще, чем приращение функции, поэтому формула (24.3) широко применяется в вычислительной практике. Пример. Найти приближенное значение приращения функции у = х3-2х+1 при х = 2 и ∆х = 0,001. Решение. Применяем формулу (24.3): ∆у≈dy = (х3-2х+1)'\*∆х = (3х2-2)\*∆х. dy|x=2; ∆x=0.001 = (3\*4-2)\*0.001 = 10\*0.001 = 0.01. Итак, ∆у≈0,01. Посмотрим, какую погрешность допустили, вычислив дифференциал функции вместо ее приращения. Для этого найдем ∆у:

∆у=((х+∆х)3-2(х+∆х)+1)-(х3-2х+1)=х3+3х2\*∆х+3х\*(∆х)2+(∆х)3-2х-2\*∆х+1-х3+2х-1=∆х(3х2+3х\*∆х+(∆х)2-2); ∆y|x=2; ∆x=0.001 = 0.001(3\*4+3\*2\*0.001+0.0012-2) = 0.010006. Абсолютная погрешность приближения равна |∆у-dy| = |0,010006-0,011=0,000006. Подставляя в равенство (24.3) значения ∆у и dy, получим ƒ(х+∆х)-ƒ(х)≈ƒ'(х)∆х или [ƒ(х+∆х)≈ƒ(х)+ƒ'(х)\*∆х] [24.4]. Формула (24.4) используется для вычислений приближенных значений функций.

**34 - Дифференциалы высших порядков.** Пусть у = ƒ(х) дифференцируемая функция, а ее аргумент х — независимая переменная. Тогда ее первый дифференциал dy = ƒ'(х)dx есть также функция х; можно найти дифференциал этой функции. Дифференциал от дифференциала функции у = ƒ(х) называется ее вторым дифференциалом (или дифференциалом второго порядка) и обозначается d2y или d2ƒ(х). Итак, по определению d2y = d(dy). Найдем выражение второго дифференциала функции у = ƒ(х). Так как dx = ∆х не зависит от х, то при дифференцировании считаем dx постоянным: d2y = d(dy) = d(f'(x)dx) = (ƒ'(х)dx)'\*dx = f"(x)dx\*dx = f"(x)(dx)2 т. е. [d2y = ƒ"(х)dх2] [24.5]. Здесь dx2 обозначает (dx)2. Аналогично определяется и находится дифференциал третьего порядка.

**35 - Теоремы Ролля, Коши, Лагранжа.** Теорема 25.1 (Ролль). Если функция ƒ(х) непрерывна на отрезке [а;b], дифференцируема на интервале (а; b) и на концах отрезка принимает одинаковые значения ƒ(а) = ƒ(b), то найдется хотя бы одна точка сє(а;b), в которой производная ƒ'(х) обращается в нуль, т. е. ƒ'(с) = 0. [!] Так как функция ƒ(х) непрерывна на отрезке [а;b], то она достигает на этом отрезке своего наибольшего и наименьшего значений, соответственно, М и m. Если М = m, то функция ƒ(х) постоянна на [a;b] и, следовательно, ее производная ƒ'(х) = 0 в любой точке отрезка [a;b]. Если М ≠ m, то функция достигает хотя бы одно из значений М или m во внутренней точке с интервала (a;b), так как ƒ(a) = ƒ(b).

Пусть, например, функция принимает значение М в точке х = сє(a;b), т. е. ƒ(с) = М. Тогда для всех хє(a;b) выполняется соотношение: [ƒ(с)≥ƒ(х)] [25.1]. Найдем производнуюƒ'(х) в точке х = с: f’(c) = lim((f(c)+ ∆x)-f(c))/∆x) при ∆х→0.

В силу условия (25.1) верно неравенство ƒ(с+∆х)—ƒ(с)≤0. Если ∆х>0 (т. е. ∆х→0 справа от точки х=с), то: (f(c+∆x)-f(c))/∆x≤0 и поэтому ƒ'(с)≤0. Если ∆х<0, то (f(c+∆x)-f(c))/∆x≥0 и ƒ'(с)≥0. Таким образом, ƒ'(с) = 0. В случае, когда ƒ(с) = m, доказательство аналогичное. Геометрически теорема Ролля означает, что на графике функции у = ƒ(х) найдется точка, в которой касательная к графику параллельна оси Ох (см. рис. 139 и 140). На рисунке 141 таких точек две. Теорема 25.2 (Коши). Если функции ƒ(х) и φ(x) непрерывны на отрезке [a;b], дифференцируемы на интервале (α;b), причем φ'(х) ≠ 0 для хє(а;b), то найдется хотя бы одна точка сє(a;b) такая, что выполняется равенство: (f(b)-f(a))/(φ(b)-φ(a)) = f’(c)/φ’(c). Теорема 25.3 (Лагранж). Если функция ƒ(х) непрерывна на отрезке [а;b], ифференцируема на интервале (α;b), то найдется хотя бы одна точка сє(a;b) такая, что выполняется равенство: [ƒ(b)-ƒ(a) = ƒ'(с)(b-a)] [25.2]. Следствие 25.1. Если производная функции равна нулю на некотором промежутке, то функция постоянна на этом промежутке. Следствие 25.2. Если две функции имеют равные производные на некотором промежутке, то они отличаются друг от друга на постоянное слагаемое.

**36 - Правило Лопиталя. Раскрытие неопределённостей различных видов.** **36.1** Рассмотрим способ раскрытия неопределенностей вида 0/0 и ∞ /∞, который основан на применении производных. Теорема 25.4 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида 0/0). Пусть функции ƒ(х) и φ(x) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки х0 и обращаются в нуль в этой точке: ƒ(х0) = φ(х0) = 0. Пусть φ'(х) ≠ 0 в окрестности точки х0. Если существует предел: lim(f’(x)/ф’(x) = l, то lim(f(x)/ф(x)) = lim(f’(x)/ф’(x)) = l (всё при х→x0). Теорема 25.5 (Правило Лопиталя раскрытия неопределенностей вида ∞/∞). Пусть функции ƒ(х) и φ(х) непрерывны и дифференцируемы в окрестности точки х0 (кроме, может быть, точки х0). в этой окрестности: lim(f(x)) = lim(ф(x)) = ∞ при х→x0, φ'(х) ≠ 0. Если существует предел: lim(f’(x)/ф’(x), то lim(f(x)/ф(x) = lim(f’(x)/ф’(x) (всё при х→x0). **36.2** Раскрытие неопределенностей различных видов. Правило Лопиталя применяется для раскрытия неопределенностей вида 0/0 и ∞/∞, которые называют основными. Неопределенности вида 0\*∞ ,∞-∞ , 1∞ , ∞0 , 0° сводятся к двум основным видам путем тождественных преобразований. Пусть ƒ(х)→0, φ(х)→ ∞ при х→х0. Тогда очевидны следующие преобразования:



2. Пусть ƒ(х)→ ∞ , φ(х)→ ∞ при х→х0. Тогда можно поступить так:



3. Пусть или ƒ(х)→1 и φ(х)→ ∞, или ƒ(х)→ ∞ и φ(x)→0, или ƒ(х)→0 и φ(х)→0 при х→х0. Для нахождения предела вида lim(ƒ(х)φ(х)) при х →х0 удобно сначала прологарифмировать выражение А = ƒ(х)φ(х).

**37 - Необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции.** Теорема 25.6 (необходимые условия). Если дифференцируемая на интервале (a;b) функция ƒ(х) возрастает (убывает), то ƒ'(х)≥0 (ƒ"(х)≤0) для любого x є (a;b). Теорема 25.7 (достаточные условия). Если функция ƒ(х) дифференцируема на интервале (a;b) и ƒ'(х)>0 (ƒ'(х)<0) для любого xє(a;b), то эта функция возрастает (убывает) на интервале (a;b).

**38 - Необходимые и достаточные условия экстремума функции.** Теорема 25.8 (необходимое условие экстремума). Если дифференцируемая функция у=ƒ(х) имеет экстремум в точке х0, то ее производная в этой точке равна нулю: ƒ'(х0) = 0. Непрерывная функция может иметь экстремум лишь в точках, где производная функции равна нулю или не существует. Такие точки называются критическими. Теорема 25.9 (достаточное условие экстремума). Если непрерывная функция у = ƒ(х) дифференцируема в некоторой d -окрестности критической точки х0 и при переходе через нее (слева направо) производная ƒ'(х) меняет знак с плюса на минус, то х0 есть точка максимума; с минуса на плюс, то х0 — точка минимума.

**39 - Наибольшее и наименьшее значения функции на отрезке.** Пусть функция у = ƒ(х) непрерывна на отрезке [а;b]. Как известно, такая функция достигает своих наибольшего и наименьшего значений. Эти значения функция может принять либо во внутренней точке x0 отрезка [а;b], либо на границе отрезка, т. е. при х0 = а или х0 = b. Если х0є(а;b), то точку х0 следует искать среди критических точек данной функции (см. рис. 152).



Получаем следующее правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на [а;b]:

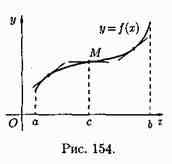
1) найти критические точки функции на интервале (а;b);

2) вычислить значения функции в найденных критических точках;

3) вычислить значения функции на концах отрезка, т. е. в точках х = а и х = b;

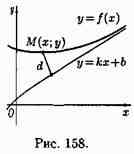
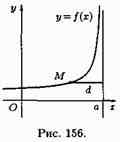
4) среди всех вычисленных значений функции выбрать наибольшее и наименьшее.

**40 - Выпуклость графика функции. Точки перегиба.** График дифференцируемой функции у = ƒ(х) называется выпуклым вниз на интервале (а;b), если он расположен выше любой ее касательной на этом интервале. График функции у = ƒ(х) называется выпуклым вверх на интервале (а;b), если он расположен ниже любой ее касательной на этом интервале. Точка графика непрерывной функции у = ƒ(х), отделяющая его части разной выпуклости, называется точкой перегиба. На рисунке 154 кривая у = ƒ(х) выпукла вверх в интервале (а;с), выпукла вниз в интервале (с;b), точка М(с;ƒ(с)) — точка перегиба.



Интервалы выпуклости вниз и вверх находят с помощью следующей теоремы. Теорема 25.11. Если функция у = ƒ(х) во всех точках интервала (а;b) имеет отрицательную вторую производную, т. е. ƒ"(х)<0, то график функции в этом интервале выпуклый вверх. Если же ƒ"(х)>0 для любого xє(а;b) — график выпуклый вниз. Теорема 25.12 (достаточное условие существования точек перегиба). Если вторая производная ƒ"(х) при переходе через точку х0, в которой она равна нулю или не существует, меняет знак, то точка графика с абсциссой х0 есть точка перегиба.

**41 - Асимптоты графика функции.** Напомним, что асимптотой кривой называется прямая, расстояние до которой от точки, лежащей на кривой, стремится к нулю при неограниченном удалении от начала координат этой точки по кривой (рис. 156).



Асимптоты могут быть вертикальными, наклонными и горизонтальными.

Говорят, что прямая х = а является вертикальной асимптотой графика функции y = f(x), если lim(f(x)) = ∞ (при x->a) или lim(f(x)) = ∞ (при x->a-0) или lim(f(x)) = ∞ (при x->a+0). Действительно, в этом случае непосредственно из рисунка 156 видно, что расстояние точки М(х;у) кривой от прямой х = а равно d=׀х-а׀ . Если х→а, то d→0. Согласно определению асимптоты, прямая х = а является асимптотой кривой у = ƒ(х). Для отыскания вертикальных асимптот нужно найти те значения х, вблизи которых функция ƒ(х) неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва второго рода. Уравнение наклонной асимптоты будем искать в виде [y = kx+b] [25.5]. Найдем k и b. Пусть М(х;у) — произвольная точка кривой у = ƒ(х) (см. рис. 158). По формуле расстояния от точки до прямой: d = |(Ax0+By0+C)/√(A2+B2)| - находим расстояние от точки М до прямой (25.5): d = |(kx-y+b)/√(k2+1)|. Условие d→0 будет выполняться лишь тогда, когда числитель дроби стремится к нулю, т.е. [lim(kx-y+b) = 0 (при x->∞)] [25.6]. Отсюда следует, что kx-у+b = α, где α = α(х) бесконечно малая: α→0 при х→ ∞ . Разделив обе части равенства у=b+kx-α на х и перейдя к пределу при х→ ∞ , получаем: lim(y/x) = lim(b/x+k- α/x) (при x->∞). Так как b/х→0 и α/х→0, то [k = lim(y/x) (при x->∞)] [25.7]. Из условия (25.6) находим b: [b = lim(y-kx) (при x->∞)] [25.8]. Итак, если существует наклонная асимптота у = kx+b, то k и b находятся по формулам (25.7) и (25.8). Верно и обратное утверждение: если существуют конечные пределы (25.7) и (25.8), то прямая (25.5) является наклонной асимптотой. Если хотя бы один из пределов (25.7) или (25.8) не существует или равен бесконечности, то кривая у = ƒ(х) наклонной асимптоты не имеет. В частности, если k = 0, то b = limƒ(х) при х →∞ . Поэтому у = b — уравнение горизонтальной асимптоты. Замечание: Асимптоты графика функции у=ƒ(х) при х→+ ∞ и х→- ∞ могут быть разными. Поэтому при нахождении пределов (25.7) и (25.8) следует отдельно рассматривать случай, когда х→+∞ и когда х→- ∞ .

**42 - Формула Тейлора.**

Пусть функция ƒ(х) есть многочлен Рn(х) степени n:

ƒ(х)=Рn(х)=а0+а1х+а2х2+...+аnхn. Преобразуем этот многочлен также в многочлен степени n относительно разности х-х0, где х0 — произвольное число, т. е. представим Рn(х) в виде

Рn(х)=А0+A1(x-х0)+А2(х-х0)2+...+Аn(х-х0)n (26.1)

Для нахождения коэффициентов А0, А1 ,..., Аn продифференцируем n раз равенство (26.1):

Р'n(х)=А1+2А2(х-x0)+3A3(x-x0)2+...+nAn(x-x0)n-1,

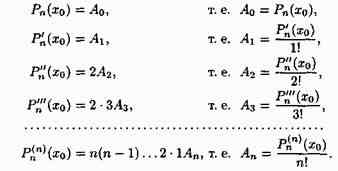
Рn''(х)=2\*А2+2\*3А3(х-х0)+...+n(n-1)Аn(х-х0)n-2,

Рn"'(х)=2\*3А3+2\*3\*4А4(х-х0)+...+n(n-1)(n-2)Аn(х-х0)n-3,

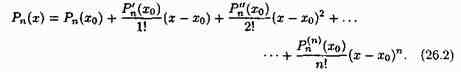
- - - - - - - - - - - - - - - - - -

Рn(n)(х)=n(n-1)( n-2)...2\*1\*Аn

Подставляя х=х0 в полученные равенства и равенство (26.1), имеем:



Подставляя найденные значения A0,A1,...,An в равенство (26.1), получим разложение многочлена n-й степени Рn(х) по степеням (х-х0):



Формула (26.2) называется формулой Тейлора для многочлена Рn(х) степени n.